Simulare, Bacalaureat, 18 mai 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Filiera teoretică, profil real, specializarea ştiinţe ale naturii.

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **30 puncte**

1.	$z=4a^2+12ai-9+4a^2-12ai-9=$ $=8a^2-18\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
2.	Parabolele asociate celor două funcții au același vârf, deci $\frac{3}{2}=\frac{3b}{2}$ și $\frac{-9+4a}{4}=\frac{9b^2-16}{4}$ $b=1,\ a=\frac{1}{2}$	**3p** **2p**
3.	$2^x+\frac{2}{2^x}=3\Leftrightarrow 2^{2x}-3\cdot 2^x+2=0\Leftrightarrow (2^x-1)(2^x-2)=0$ $x=0$ sau $x=1$	**3p** **2p**
4.	Mulțimea $A=\{0,1,2,...,11\}$ are 12 elemente, deci sunt 12 cazuri posibile Numerele din mulțimea A al căror pătrat aparține mulțimii A sunt 0, 1, 2 și 3, deci sunt 4 cazuri favorabile $P=\frac{\text{nr.cazuri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$	**2p** **2p** **1p**
5.	$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=-2\Rightarrow m_d=\frac{1}{2}$ $d: x-2y+7=0$	**2p** **3p**
6.	$E\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin^2\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{4}+\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\right)-2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-2=$ $=\sqrt{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{2}-2=0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **30 puncte**

1. a)	$A(2021)=\begin{pmatrix}1 & 2\ln 2021\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\det A(2021)=\begin{vmatrix}1 & 2\ln 2021\\ 0 & 1\end{vmatrix}=$ $=1\cdot 1-0\cdot 2\ln 2021=1-0=1$, pentru oricare $a\in(0,+\infty)$	**1p** **1p** **3p**
b)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1 & 2\ln a\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\ln b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\ln a+2\ln b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}1 & 2\ln(ab)\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A(ab)$, pentru oricare $a,b\in(0,+\infty)$.	**3p** **2p**
c)	$A(a)\cdot A(a)\cdot A(a)\overset{b)}{=}A(a^3)=\begin{pmatrix}1 & 2\ln a^3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 2\ln a^3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2022\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow 2\ln a^3=2022\Leftrightarrow \ln a=\frac{2022}{6}\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{e^{1011}}\in(0,+\infty)$	**2p** **3p**
2. a)	$x\circ y=7xy+x+y+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}=7x\left(y+\frac{1}{7}\right)+\left(y+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{7}=$ $=\left(y+\frac{1}{7}\right)(7x+1)-\frac{1}{7}=7\left(x+\frac{1}{7}\right)\left(y+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{7}$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
b)	$7\left(x+\frac{1}{7}\right)^2-\frac{1}{7}=\frac{8}{7}\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{7}\right)^2=\frac{9}{49}$ $x=\frac{2}{7}$ sau $x=-\frac{4}{7}$	**2p** **3p**
c)	$x\circ\left(-\frac{1}{7}\right)=\left(-\frac{1}{7}\right)\circ x=-\frac{1}{7}$, pentru orice număr real x $\left[\left(-\frac{2021}{14}\right)\circ\left(-\frac{2020}{14}\right)\circ\ldots\circ\left(-\frac{3}{14}\right)\right]\circ\left(-\frac{2}{14}\right)\circ\left(-\frac{1}{14}\right)=\left[\left(-\frac{2021}{14}\right)\circ\ldots\circ\left(-\frac{3}{14}\right)\right]\circ\left(-\frac{1}{7}\right)\circ\left(-\frac{1}{14}\right)=$ $=\left(-\frac{1}{7}\right)\circ\left(-\frac{1}{14}\right)=-\frac{1}{7}$	**2p** **1p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **30 puncte**

1. a)	$f'(x)=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right)'=$ $=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-1=\sqrt{x}-1,\ x\in(0,+\infty)$	**2p** **3p**

b)	$f'(1)=0,\ f(1)=-\frac{1}{3}$	**3p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-\frac{1}{3}$	**2p**
c)	$f'(1)=0,\ f'(1)\le 0$ pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow$ f este crescătoare pe $[1,+\infty)$.	**2p**
	Pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $f(x)\ge f(1)\Rightarrow \frac{2}{3}x\sqrt{x}-x\ge -\frac{1}{3}\Rightarrow x\left(2\sqrt{x}-3\right)\ge -1$	**3p**
2. a)	$\int_1^e \frac{f(x)}{e^x}dx=\int_1^e \frac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\ln e-\ln 1=1$	**2p**
b)	$\int_1^2 x^3 f\left(x^2\right)dx=\int_1^2 xe^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}e^{x^2}\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\frac{e^4-e}{2}=\frac{e(e-1)\left(e^2+e+1\right)}{2}$	**2p**
c)	$\int_1^e \frac{e^x}{x}dx+\int_1^e e^x\ln x\,dx=\int_1^e (\ln x)'e^x dx+\int_1^e e^x\ln x\,dx=e^x\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e e^x\ln x dx+\int_1^e e^x\ln x dx=$	**3p**
	$=e^e\ln e-e^1\ln 1=e^e$	**2p**